BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ТОЧЕЧНЫЙ УДАР ПО ГИБКОЙ МЕМБРАНЕ

Р.Ф.ХАЛИЛОВ
Азербайджанский Технический Университет

В работе рассматривается задача о поперечном точечном ударе с постоянной скоростью по гибкой упругой мембране. Задача решена приближенным методом путем замены кривой двумя прямыми. Поскольку задача является автомодельной, при решении уравнения в частных производных приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Пусть по гибкой мембране бесконечной протяженности производится прямой удар острым телом, имеющим с ней лишь одну точку соприкосновения. Предполагается, что в процессе соударения скорость ударяющего тела V_0 остается неизменной, начальная толщина мембраны δ постоянна, а сама она до удара не деформирована и расположена в одной плоскости. Уравнения движения элемента мембраны запишутся так [1] :

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r_0}(\sigma_t r_0 \cos\gamma) - \dfrac{\sigma_\theta}{r_0}, \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial}{\partial r_0}(\sigma_t r_0 \sin\gamma), \end{cases} \tag{1}$$

здесь w, u -смещение точек в направлениях осей r, y соответственно, r_0 -лагранжева координата точек мембраны, σ_t, σ_θ -меридиональное и кольцевое напряжения соответственно, γ - угол между положительным направлением оси Or и касательным к меридиональным сечениям.

Очевидно, что

$$\cos\gamma = \frac{1}{1+e_t}\left(1+\frac{\partial w}{\partial r}\right), \qquad \sin\gamma = -\frac{1}{1+e_t}\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} e_t = \sqrt{\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2} - 1, \\ e_\theta = \dfrac{w}{r_0}, \end{cases} \qquad (3)$$

здесь e_t, e_θ - меридиональная и кольцевая деформации.

Задача решается при следующих начальных и граничных условиях :

$$\begin{cases} w\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} = 0, \\ w\big|_{t=0} = 0 \;, \qquad u\big|_{r=0} = v_0 t. \end{cases} \qquad (4)$$

Преобразуем систему (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Функциональные зависимости, выражающие собой физические факты, которые не зависят от системы единиц измерения, должны обладать некоторой структурой.

Пусть мы имеем размерную величину w, которая является функцией зависимых и независимых между собой размерных величин $r_{0,}\ t, a_0$:

$$w = w(r_0, t, a_0), \qquad (5)$$

здесь r_0 и t - зависимые переменные.

Введем для их размерностей обозначения

$$[r_0] = L, \qquad [t] = T.$$

Зависимая переменная a_0 имеет размерность

$$[a_0] = LT^{-1}.$$

Изменим теперь единицы измерения величин r_0, t соответственно в α_1, α_2 раз: численные значения этих величин и величин w, a_0 в новой системе единиц будут соответственно равны:

$$r' = \alpha_1 r,\ t' = \alpha_2 t,\ w' = \alpha_1 w,\ a_0' = \alpha_1 \alpha_2^{-1} a_0.$$

В новой системе единиц измерения соотношение (5) примет вид

$$w' = \alpha_1 w = \alpha_1 w(r_0, t, a_0) = w\left(\alpha_1 r_0, \alpha_2 t, \alpha_1 \alpha_2^{-1} a_0\right). \qquad (6)$$

Это равенство показывает, что функция w обладает свойством однородности относительно масштабов α_1, α_2. Масштабы произвольны. Воспользуемся выбором этих масштабов для сокращения числа аргументов у функции w. Положим:

$$\alpha_1 = \frac{1}{r_0}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{t},$$

т.е выберем систему единиц измерения таким образом, чтобы значения первых двух аргументов в правой части соотношения (6) равнялись единице. В этой относительной системе единиц измерения численные значения параметров w, a_0 определяются формулами

$$\overline{w} = \frac{w}{r_0}, \quad \overline{a}_0 = \frac{a_0 t}{r_0} = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{r}{a_0 t}.$$

Нетрудно видеть, что значения $\overline{w}$, $\overline{a}_0$ не зависят от выбора первоначальной системы единиц измерения, так как они имеют нулевую размерность относительно измерения L, T. Следовательно, эти величины можно рассматривать как безразмерные. Пользуясь относительной системой единиц измерения, соотношение (5) можно представить в виде:

$$\frac{w}{r_0} = w\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{или} \qquad \frac{w}{a_0 t} = w\left(\frac{1}{z}\right).$$

Аналогичные результаты получаются для соотношения

$$u = u(r_0, t, a_0).$$

Таким образом, поставленная задача является автомодельной. Вводя безразмерные величины

$$X(z) = \frac{r_0 + w}{a_0 t}, \qquad Y(z) = \frac{u}{a_0 t},$$

переходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям :

$$\begin{cases} \rho_0 a_0^2 z^2 x'' = \dfrac{d}{dz}\left(\sigma_t \cos\gamma\right) + \dfrac{\sigma_t \cos\gamma - \sigma_\theta}{z}, \\ \rho_0 a_0^2 z^2 y'' = -\dfrac{d}{dz}\left(\sigma_t \sin\gamma\right) - \dfrac{\sigma_t}{z}\sin\gamma. \end{cases} \tag{7}$$

Для решения системы (7) вместо кривой ABD берется ломаная линия (рис.1). Иначе говоря, кривая ABD аппрокцимируется с двумя прямыми линиями. На прямых линиях угол γ остается постоянным:

$$tg\gamma_i = k_i = const, \qquad i = 1, 2.$$

Из (2) находим, что

$$y_i' = -k_i x_i.$$

При наличии этих соотношений систему (7) можно привести к следующему виду :

$$\begin{cases} \rho_0 a_0^2 z^2 x_i'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+k_i^2}} \dfrac{d\sigma_{ti}}{dz} + \dfrac{\sqrt{1+k_i^2}\,\sigma_{ti} - \sigma_{\theta i}}{z}, \\ -k_i \rho_0 a_0^2 z^2 y_i'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+k_i^2}} \dfrac{d\sigma_{ti}}{dz} + \dfrac{k_i}{\sqrt{1+k_i^2}} \dfrac{\sigma_{ti}}{z}. \end{cases}$$

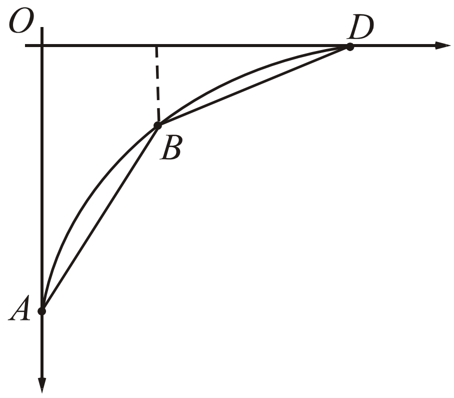

Рис. 1.

Умножим первое уравнение на k_i и сложим со вторым уравнением

$$2\frac{k_i}{\sqrt{1+k_i^2}}\frac{d\sigma_{ti}}{dz} + 2\frac{k_i}{\sqrt{1+k_i^2}}\frac{\sigma_{ti}}{z} - k_i\frac{\sigma_{\theta i}}{z} = 0.$$

При линейной зависимости между напряжением и деформацией имеем:

$$2z^2 x_i'' + p_i z x_i' - x_i = q_i z, \tag{8}$$

где

$$p_i = 2 + \frac{2\nu}{\sqrt{1+k_i^2}} - \nu\sqrt{1+k_i^2},$$

$$q_i = (1+\nu)\left(\frac{2}{\sqrt{1+k_i^2}} - 1\right).$$

Уравнение (8) допускает одно частное решение

$$x_{i0} = \frac{q_i}{p_i - 1} z$$

и общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$x_i = c_i z^{n_i} + \bar{c}_i z^{\bar{n}_i} .$$

Тогда общее решение (8) будет

$$x_i = c_i z^{n_i} + \bar{c}_i z^{\bar{n}_i} + \frac{q_i}{p_i - 1} z .$$

Отсюда имеем

$$y_i = -k_i \left(c_i z^{n_i} + \bar{c}_i z^{\bar{n}_i} + \frac{q_i}{p_i - 1} \right) + \bar{\bar{c}}_i ,$$

здесь

$$n_i = \frac{1}{4}\left(- p_i + \sqrt{p_i^2 + 8} \right), \qquad \bar{n}_i = \frac{1}{4}\left(- p_i - \sqrt{p_i^2 + 8} \right),$$

а $c_i, \bar{c}_i, \bar{\bar{c}}_i$ - постоянные интегрирования.

В основе нашего предположения существуют три области движения. Из условия непрерывности и на волне сильного разрыва определяются постоянные $c_i, \bar{c}_i, \bar{\bar{c}}_i$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Демьянов. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: гос. изд. физико-математической литературы, 1961, 399 с.
2. Ленский В.С. Об упруго-пластическом ударе стержня о жесткую преграду. ПММ, т. XIII, №2, 1949.

ÇEVİK MEMBRANA NÖQTƏVİ ZƏRBƏ

R.F.XƏLİLOV

ANNOTASİYA

İşdə elastiki çevik membrana sabit sürətlə zərbə məsələsinə baxılır. Baxılan məsələ təqribi olaraq membran profilinin iki düz xətlə əvəz olunması ilə həll edilir. Məsələnin avtomodelliyindən istifadə edərək xüsusi törəməli diferensial tənliklər adi diferensial tənliklərə çevrilir.

DOT IMPACT ON THE FLEXIBLE MEMBRANE

R.F.KHALILOV

ABSTRACT

In work the problem about cross-section dot impact with constant speed on a flexible elastic membrane is considered. The problem is solved by the approached method by replacement of a curve with two straight lines. As the problem is automod-elling, at the decision of the equation in private derivatives are resulted in the ordinary differential equations.